تحريك الجسيم المادي الحر

د.اسكندر عمجة

المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المادي الحر

إذا أثرت على جسيم مادي حر M_k كتلته تساوي m_k مجموعة من القوى ΣF_k فإنه يكتسب تسارعاً A_k وفق العلاقة الأساسية للتحريك $m_k\vec{A} = \Sigma\vec{F}_k$ حيث محصلة القوى $R_k = \Sigma F_k$ يجب أن تساير المتجه $m_k.\vec{A}$

وهنا نميز حالتين:

1- إذا كانت المحصلة $\vec{R}_k$ ثابتة بالمنحى (وليس بالضرورة ثبات القيمة) وكان الجسيم ساكن أو سرعته الابتدائية v_0 منطبقة على المحصلة $\vec{R}_k$ فإن الجسيم سيرسم خطاً مستقيماً.

مثال:امسك كرةً واتركها تسقط سقوطاً حراً بتأثير الجاذبية فإنها ستسقط وفق خط مستقيم وإذا أعطيتها سرعة ابتدائية ولكن على نفس منحى القوة فسوف ترسم كذلك خطاً مستقيماً وكذلك إذا قذفت باتجاه الأعلى.

2- إذا كانت المحصلة $\vec{R}_k$ متغيرة المنحى، أو إذا كانت ثابتة وكانت السرعة الابتدائية v_0 لا توازي المحصلة فإن الجسيم يرسم عند ذلك مساراً منحنياً.

مثال:اقذف كرةً بشكلٍ مائل فإن السرعة الابتدائية v_0 لن توازي المحصلة وإنما سترسم خطاً منحنياً.

الحالة الأولى:

حركة الجسيم المادي على خط مستقيم

في هذه الحالة ينطبق متجه التسارع $\vec{A}_k$ على حامل محصلة القوى $\vec{R}_k = \Sigma\vec{F}_k$ أي على طول الخط المستقيم ox

ومنه بإسقاط العلاقة الأساسية في التحريك على منحى التسارع نحصل على:

$$m_k A_{kx} = \Sigma F_{kx} = R_{kx}$$

والتي تكتب بالشكل:

$$m_k . x^{\circ\circ}{}_k = \Sigma F_{kx} = R_{kx}$$

وتدعى العلاقة الأخيرة بالمعادلة التفاضلية لحركة الجسيم المادي الحر على مسار مستقيم،وتساعد في حل مسائل النوع الثاني بعد تعيين $x = f(t)$.

وذلك بعد معرفة محصلة القوة المؤثرة على الجسيم ΣF_{kx} ، والشروط الابتدائية للحركة:

1- $m_k \frac{d\vec{V}_{kx}}{dt} = \Sigma F \Rightarrow m_k . x_k{}^{\circ\circ} = \Sigma F_{kx}$ حيث $V_{kx} = \frac{dx_k}{dt}$

2- إذا كان المطلوب: إيجاد السرعة كتابع للمسافة x أو عندما تكون القوة تابعة للمسافة

$$m_k \frac{dv_{kx}}{dt} = \Sigma F_{kx} \Longrightarrow m_k . \frac{\boldsymbol{dx_k}}{dt} . \frac{dv_{kx}}{\boldsymbol{dx_k}} = \Sigma F_{kx}$$

ومنه نلاحظ أن القوة في الحالة العامة تابعة للزمن t ولوضع الجسيم x_k ولسرعتها v_{kx} وبالتالي فإن المعادلة t ولوضع الجسيم x_k وبالتالي فإن المعادلة التفاضلية ستكون من الشكل:

$$m_k = x^{\circ\circ} = f(v_k, x_k, t)$$

الحل العام لهذه المعادلة يعتمد على ثابتي المكاملة c_1 , c_2 من الشروط الابتدائية للحركة ولذلك يجب معرفة موضع النقطة $x_k = f(t, c_1, c_2)$ تعيين الثوابت c_1, c_2 من الشروط الابتدائية للحركة ولذلك يجب معرفة موضع النقطة x_{0k} وسرعتها v_{0k} في اللحظة $t = 0$ وتعطى الشروط الابتدائية في حالة الحركة المستقيمة بالشكل:

$$c_1 = x^{\circ}{}_{0\,k} = v_{0\,k} c_2 = X_{0\,k}$$

$$\boldsymbol{x_0 = f(t, x^{\circ}{}_{0\,k}\,,\ x_{0\,k}\,)}$$

تدعى بالمعادلة العامة للانتقال مع الزمن

الحالة الثانية:

حركة الجسيم المادي على خط منحني

من المعادلة الأساسية للتحريك $m_k\vec{A}_k = \Sigma\vec{F}_k^a$ عندما تكون القوة الفاعلة في هذه الحالة متغيرة في المنحى أو المقدار فإنه يستحسن استعمال طريقة ماك لوران

$$m_k\left(A_kx\vec{i} + y\vec{j} + A_kz\vec{k}\right) = \Sigma\left(F_kx\vec{i} + F_ky\vec{j} + F_kz\vec{k}\right)$$

$$m_k.A_kx = \Sigma F_kx \quad \Rightarrow \quad m_kx^{\circ\circ}{}_k$$

$$m_k.A_ky = \Sigma F_ky \quad \Rightarrow \quad m_ky^{\circ\circ}{}_k$$

$$m_k.A_kz = \Sigma F_kz \quad \Rightarrow \quad m_kz^{\circ\circ}{}_k$$

تستعمل لإيجاد مركبات التسارع

تستعمل لإيجاد معادلات الحركة

الغاية من حساب التسارع هي حساب القوة الفاعلة (الديناميكية) ومن ثم حساب قوى الاتصال

مسألة: المعادلة التفاضلية لتحريك جسيم حر على مسار مستقيم/القوة تابعة للزمن

يتحرك جسم على مسار مستقيم تحت تأثير قوة تتناقص بانتظام

وبعد T ثانية يكون $t = T$ و $F = 0$

المعطيات: المسار مستقيم ، القوة متناقصة

الشروط الابتدائية: $A_0 = A$ $\quad x_0 = 0$ $\quad t = 0 v_0 = 0$

المطلوب: $x_t = ?$ $\qquad v_t = ?$

الحل:

-نفرض معادلة القوة من الشكل

$$F_t = f_0 - A.t$$

F_0, A- مجهولين نطبق العلاقة الأساسية في تحريك الجسيم الحر

- عند $m.A_t = F_0 \quad t = 0$
- عند $m.A_t = 0 \Rightarrow F_T \quad \text{t} = 0$

-نعوض في معادلة القوة عندما $T = t$

$$0 = m.A_0 - T$$

$$A = m\frac{A_0}{T}$$

$$mA_t = mA_0 - \frac{m\,A_0}{T}t$$

$$A_t = A_0(1 - \frac{t}{T})$$

$$\frac{dv}{dt} = A_0(1 - \frac{t}{T})$$

$$\int_{v_0=0}^{v} dv = \int_{t_0=0}^{t}\left(1 - \frac{t}{T}\right)dt$$

$$v - v_0 = A_0[t - \frac{t^2}{2T}]$$

$$v_0 = 0 \;\Rightarrow v = A_0[T - \frac{t^2}{2T}]$$

حصلنا على معادلة السرعة بدلالة الزمن t

$$v_T = \frac{1}{2}A_0T$$

نحسب المسافة باشتقاق علاقة السرعة:

$$\frac{dx}{dt} = A_0[t - \frac{t^2}{2T}]$$

نكامل كما سبق ..فنجد:

$$x - x_0 = A_0[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6T}]$$

$$x_0 = 0 \;\Rightarrow x = \frac{A_0}{2}[t^2 - \frac{t^3}{3T}]$$

$$x_T = \frac{A_0}{2}[T^2 - \frac{T^2}{3}]$$

$$x_t = \frac{A_0}{3}T^2$$

مسألة: المعادلة التفاضلية لتحريك جسيم حر على مسار مستقيم/القوة تابع للمسافة

يتحرك جسيم كتلته m على مسار مستقيم x بفعل القوة F=f(x) وتساوي 4mx

المعطيات: المسار مستقيم ، القوة متناقصة

الشروط الابتدائية: $t = 0 v_0 = 0 \;\; x_0 = 0 \quad A_0 = A$

المطلوب: $x_t = ? \qquad v_t = ?$

الحل:

1- لإيجاد معادلة الحركة نوجد المعادلة التفاضلية لحركة الجسيم كما يلي:

$$mA = 4mx$$
$$\frac{dv}{dt} = 4x$$
$$\frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = 4x$$
$$\frac{dv}{dx} \cdot v = 4x \;\Rightarrow v\,dv = 4x\,dx$$

تكامل الطرفين:

$$\int_{v_0=0}^{v} v\,dv = 4\int_{x_0=2}^{x} x\,dx$$
$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0=0}^{v} = 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0=0}^{x}$$
$$\frac{v^2}{2} = 4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{2}\right]$$
$$v^2 = 4(x^2 - 4)$$
$$v = 2\sqrt{x^2 - 4}$$
$$v = f(x)$$

نوجد الآن $x = f(t)$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 4}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = 2dt$$
$$\int_{x_0=0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}} = 2\int_{t_0=0}^{t} 1\,dt$$
$$\left[\ln(x + \sqrt{x^2 - 4})\right]_{x_0=2}^{x} = 2[t]_{t_0=0}^{t}$$
$$\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}\right) = 2t$$

نوجد e للطرفين:

$$x + \sqrt{x^2 - 4} = 2e^{2t}$$
$$x^2 - 4 = 4e^{4t} - 4e^{2t}x + x^2$$
$$e^{4t} - e^{2t}x = -1$$
$$x = e^{2t} + e^{-2t} : \boldsymbol{x = f(x)}$$